

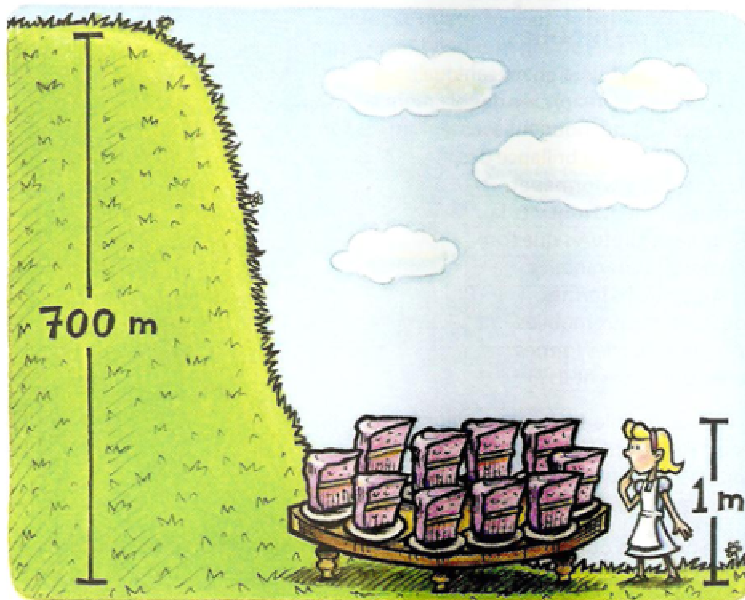
3.1

Exprimer des nombres à l'aide de puissances

Objectifs

Après cette leçon, tu pourras...

- exprimer une multiplication répétée par un exposant;
- décrire la façon dont une puissance représente une multiplication répétée.



Dans *Alice au pays des merveilles*, Alice modifie sa taille en mangeant du gâteau. Si elle veut tripler sa taille, elle mange un morceau de gâteau. Imagine qu'Alice mesure 1 mètre. Pour voir de l'autre côté de la colline, elle doit mesurer au moins 700 m. Combien de morceaux de gâteau doit-elle manger ?

Matériel

- calculatrice

Explorer la multiplication répétée

1. Quelle sera la taille d'Alice après avoir mangé un, deux et trois morceaux de gâteau ? Décris les régularités que tu observes dans le tableau.
2. a) Combien de morceaux de gâteau Alice doit-elle manger pour mesurer au moins 700 m ? Comment arrives-tu à cette réponse ?
b) Combien Alice mesure-t-elle après avoir mangé tous les morceaux de gâteau en a) ?
c) Combien de fois dois-tu multiplier le facteur 3 pour obtenir ta réponse en b) ?
3. Comment ta calculatrice peut-elle t'aider à déterminer la taille d'Alice après qu'elle aura mangé huit morceaux de gâteau ? Discutes-en avec d'autres élèves. Note les méthodes qui fonctionnent avec ta calculatrice.

Réfléchis et vérifie

4. a) L'expression 3^2 peut servir à exprimer la taille d'Alice après deux morceaux de gâteau. Que signifie cette expression pour ce qui est du nombre de facteurs 3 ?
- b) Comment représenterais-tu $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ sous la forme d'une puissance ? Quels sont la base et l'exposant de l'expression obtenue ?
5. Combien Alice mesurera-t-elle après avoir mangé dix morceaux de gâteau ?

Fais des liens

Exemple 1 : Écrire puis évaluer les puissances

- a) Écris $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ sous une forme exponentielle.
- b) Évalue la puissance.

Solution

- a) L'expression $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ contient cinq facteurs 2. On peut l'écrire comme la puissance 2^5 .
La base de la puissance est 2 et son exposant est 5.
- b) Le produit de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ est 32.
Donc, $2^5 = 32$.

Montre ce que tu sais

- a) Écris $4 \times 4 \times 4$ sous la forme d'une puissance.
- b) Évalue cette puissance.

Lien histoire

Le mathématicien grec Euclide a vécu environ de 325 à 265 avant notre ère. Il a été le premier à employer le terme *puissance*. Il l'utilisait uniquement dans le contexte d'expressions au carré.

C'est en 1696, dans l'ouvrage *Arithmetic* de Samuel Jeake, que le terme *puissance* est employé la première fois pour traiter d'exposants plus grands que 2.



Euclide

puissance

- expression composée d'une base et d'un exposant



base

- nombre multiplié par lui-même dans une puissance

exposant

- le nombre de fois que la base d'une puissance est multipliée par elle-même

forme exponentielle

- façon abrégée d'écrire une multiplication répétée au moyen d'une base et d'un exposant
- 5^3 est la forme exponentielle de $5 \times 5 \times 5$

Lien littéraire

On lit une puissance de deux façons.

L'expression 2^5 peut se lire :

- deux à la cinq ;
- deux exposant cinq.

Stratégies
Créer un modèle

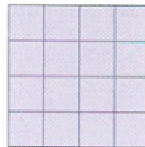
Exemple 2 : Évaluer les puissances à base positive

Évalue ces puissances :

- a) 4^2 b) 2^3 c) 3^6

Solution

- a) La puissance 4^2 peut se lire « quatre au carré ». Pour la représenter, utilise le modèle d'un carré.



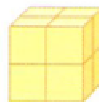
Comment ce modèle de carré représente-t-il 4^2 ?

Chaque côté du carré mesure 4 unités de longueur. Le carré a une aire de 16 parce qu'il compte 16 petits carrés en tout.

Dans la puissance 4^2 , la base est 4 et l'exposant est 2.

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

- b) La puissance 2^3 peut se lire « deux au cube ». Pour représenter la puissance, utilise le modèle d'un cube.



Comment ce modèle de cube représente-t-il 2^3 ?

Chaque côté du cube mesure 2 unités de longueur. Le cube a un volume de 8 parce qu'il compte 8 petits cubes en tout.

Dans la puissance 2^3 , la base est 2 et l'exposant est 3.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

- c) Dans la puissance 3^6 , la base est 3 et l'exposant est 6. Tu peux représenter 3^6 sous la forme d'une multiplication répétée.

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$$

$$\boxed{3} \boxed{^6} = 729$$

Tu peux aussi imaginer l'expression 3^6 comme

$$(3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 9 \times 9 \times 9 = 9^3$$

ou

$$(3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 27 \times 27 = 27^2$$

Y a-t-il d'autres possibilités ?

Montre ce que tu sais

Évalue ces puissances.

- a) 6^2 b) 3^4 c) 5^3

Exemple 3 : Évaluer les puissances à base négative

Évalue ces puissances.

- a) $(-2)^4$
- b) -2^4
- c) $(-4)^3$
- d) $-(-5)^6$

Solution

- a) Dans la puissance $(-2)^4$, la base est -2 et l'exposant est 4. L'exposant s'applique au signe négatif parce que -2 est entre des parenthèses.

Tu peux écrire la puissance sous la forme d'une multiplication répétée.

$$\begin{aligned}(-2)^4 &= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \\ &= 16\end{aligned}$$

Pourquoi cette réponse est-elle positive ?

- b) Dans la puissance -2^4 , la base est 2 et l'exposant est 4. L'exposant ne s'applique pas au signe négatif parce que -2^4 est la même chose que $-(2^4)$.

$$\begin{aligned}-2^4 &= -(2^4) \\ &= -(2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= -16\end{aligned}$$

- c) Dans la puissance $(-4)^3$, la base est -4 et l'exposant est 3.

$$\begin{aligned}(-4)^3 &= (-4) \times (-4) \times (-4) \\ &= -64\end{aligned}$$

Pourquoi cette réponse est-elle négative ?

- d) Dans l'expression $-(-5)^6$, la base est -5 et l'exposant est 6. L'exposant ne s'applique pas au premier signe négatif parce qu'il est à l'extérieur des parenthèses.

$$\begin{aligned}-(-5)^6 &= -[(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)] \\ &= -(15\,625) \\ &= -15\,625\end{aligned}$$



Montre ce que tu sais

- a) Quelles sont les ressemblances et les différences entre $(-5)^2$ et -5^2 ?
- b) Évalue $(-6)^2$ et $(-6)^5$.

Concepts clés

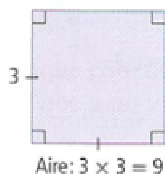
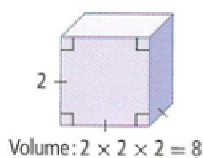
- La puissance est une façon abrégée de représenter une multiplication répétée.
 $7 \times 7 \times 7 = 7^3$
- Une puissance est composée d'une base et d'un exposant. La base représente le nombre que tu multiplies par lui-même à répétition. L'exposant représente le nombre de fois que tu multiplies la base.



Vérifie tes connaissances

Communique tes idées

1. Pourquoi est-il souvent plus facile d'écrire une expression comme une puissance plutôt qu'une multiplication répétée ?
Illustre ta réponse par un exemple.
2. En quoi les deux diagrammes et calculs montrent-ils que 2^3 et 3^2 sont différents ?



3. Selon Pani, « lorsque tu évalues une puissance à base négative dont l'exposant est pair, tu obtiens une valeur positive. Lorsque tu évalues une puissance à base négative dont l'exposant est impair, tu obtiens une valeur négative. » Pani a-t-elle raison ? Justifie ta réponse.



Exerce-toi

Si tu as besoin d'aide pour répondre aux questions 4 et 5, revois l'exemple 1 de la page 93.

4. Dans chaque cas, écris l'expression sous la forme d'une puissance, puis évalue-la.

- a) 7×7
- b) $3 \times 3 \times 3$
- c) $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$
- d) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

5. Dans chaque cas, écris l'expression sous la forme d'une puissance, identifie sa base et son exposant, puis évalue-la.

- a) $1 \times 1 \times 1 \times 1$
- b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- c) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$
- d) 13

Si tu as besoin d'aide pour répondre aux questions 6 à 9, revois l'exemple 2 de la page 94.

6. Évalue ces puissances.

- a) 5^2
- b) 3^3
- c) 4^5

7. Quelle est la valeur de ces puissances ?

- a) 8^3
- b) 2^6
- c) 1^9

8. Copie et complète le tableau.

Multiplication répétée	Forme exponentielle	Valeur
a) $6 \times 6 \times 6$	6^3	■
b) $3 \times 3 \times 3 \times 3$	■	■
c) ■	■	49
d) ■	11^2	■
e) ■	■	125

9. Est-ce que $4^3 = 3^4$? Comment le sais-tu ?

Si tu as besoin d'aide pour répondre aux questions 10 à 13, revois l'exemple 3 de la page 95.

10. Évalue ces puissances.

- a) $(-9)^2$
- b) -5^3
- c) $(-2)^7$

11. Quelle est la valeur de ces puissances ?

- a) -8^2
- b) $(-1)^5$
- c) $-(-3)^7$

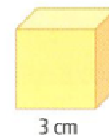
12. Copie et complète le tableau.

	Multiplication répétée	Forme exponentielle	Valeur
a)	$(-3) \times (-3) \times (-3)$	$(-3)^3$	■
b)	$(-4) \times (-4)$	$(-4)^2$	■
c)	$(-1) \times (-1) \times (-1)$	■	■
d)	■	$(-7)^2$	■
e)	■	■	-1 000

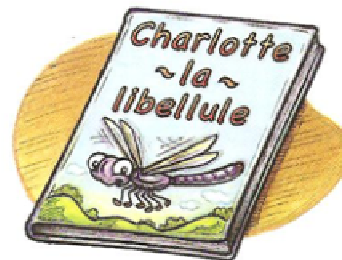
13. Est-ce que $(-6)^4 = -6^4$? Comment le sais-tu ?

Applique ce que tu sais

14. Le volume d'un cube de 3 cm de longueur est de 27 cm^3 . Écris ce volume sous la forme d'une multiplication répétée et sous la forme exponentielle.

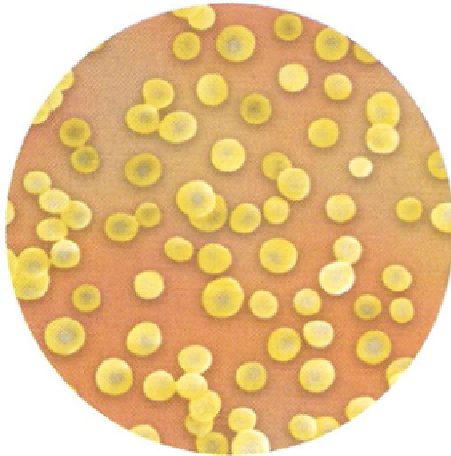


15. Dans une histoire pour enfants, Charlotte la libellule grandit rapidement. Chaque mois, son corps double de longueur. Au début, Charlotte mesure 1 cm.



- a) Crée un tableau qui montre l'augmentation de la longueur du corps de Charlotte sur une période de 10 mois.
- b) Combien le corps de Charlotte mesure-t-il cinq mois après le début de l'histoire ? Exprime ta réponse sous forme de puissance, puis évalue-la.
- c) Combien de mois faudra-t-il pour que son corps mesure plus de 50 cm de longueur ?

16. Ordonne ces puissances par ordre croissant de leur valeur: 1^{22} , 3^4 , 4^3 , 2^5 , 7^2 .
17. Une bactérie se dédouble toutes les heures. Combien de bactéries y aura-t-il après 15 h?



18. Exprime 9 sous la forme d'une puissance dont l'exposant est 2 et dont la base est:
- a) positive; b) négative.
19. Explique ce que signifie l'énoncé suivant à l'aide d'exemples numériques:
La multiplication est une façon de représenter l'addition répétée et la puissance, une façon de représenter la multiplication répétée.

20. La puissance 7^3 peut se lire « sept au cube ». Dessine un cube qui a un volume de 7^3 unités cubiques, soit 343 unités cubiques. Donne ses dimensions.
21. Représente 144 de trois façons différentes au moyen de la multiplication répétée.

Approfondissement

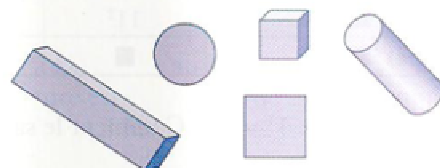
22. Évalue les puissances de 5, de 5^3 à 5^{10} . Emploie uniquement des nombres naturels comme exposants.
- a) Que remarques-tu au sujet des trois derniers chiffres de chaque valeur?
- b) Prédis quels seront les trois derniers chiffres de 5^{46} .
23. Évalue les puissances de 3, de 3^1 à 3^{12} . Emploie uniquement des nombres naturels comme exposants.
- a) Que remarques-tu au sujet du chiffre des unités?
- b) Prédis quel sera le chiffre des unités de 3^{63} . Explique ton raisonnement.

Lien mathématique

Certaines formules contiennent des exposants. En voici deux que tu connais:

- $A_c = 6c^2$
- $V = \pi r^2 h$

- a) Récris chaque formule sous la forme d'une multiplication répétée. Indique ce que la formule représente et comment tu t'en serviras.
- b) À la fin du chapitre, tu fabriqueras un mobile et tu auras besoin de formules. Parmi les formules associées aux figures ci-contre, choisis-en deux qui contiennent des exposants et récris-les sous la forme d'une multiplication répétée.



Révision du chapitre 3

Mots clés

Aux numéros 1 à 5, lis l'indice puis place les lettres dans le bon ordre.

1. T F N F E E I C C O I

Un nombre qui multiplie une puissance.

2. N E N T O E I L P E X L E R O M E F

La façon (en deux mots) dont on écrit un nombre formé d'une base et d'un exposant.

3. E A S B

Le nombre dans une puissance qu'on multiplie de manière répétée.

4. S U A I C N E P S

Une expression composée d'une base et d'un exposant.

5. S O A P T E N X

Le nombre, dans une puissance, qui indique le nombre de fois que la base est multipliée par elle-même.

3.1 Exprimer des nombres à l'aide de puissances, pages 92 à 98

6. Écris chacune de ces expressions sous la forme d'une puissance.

a) $2 \times 2 \times 2$

b) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

7. Écris chacune de ces puissances sous la forme d'une multiplication répétée.

a) 4^6

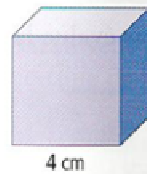
b) 6^4

c) $(-5)^7$

d) -5^7

8. L'aire d'un carré sur du papier quadrillé est de 5^2 . Évalue son aire. Trace le carré et indique son aire et la longueur de son côté.

9. Un cube a un côté qui mesure 4 cm. Exprime son volume sous la forme d'une multiplication répétée et sous la forme exponentielle, puis évalue-le.



10. Ordonne ces nombres en ordre croissant.

4^3 7^2 -3^4 9 2^5

3.2 Les lois des exposants, pages 99 à 107

11. Dans ces produits, récris chaque puissance sous la forme d'une multiplication répétée.

a) $3^2 \times 5^4$

b) $(-3)^3 \times 2^6$

12. Écris chacune des expressions entre parenthèses sous la forme d'une puissance. Ensuite, écris toute l'expression sous la forme d'une puissance unique.

a) $(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$

b) $\frac{(4 \times 4)(4 \times 4 \times 4 \times 4)}{(4 \times 4 \times 4)}$

13. Écris chacune des expressions sous la forme d'une multiplication répétée, puis sous la forme d'une puissance unique.

a) $(-5)^2 \times (-5)^5$

b) $(3^2)^4$

14. Écris chacune des expressions sous la forme d'une multiplication de deux puissances.

- a) $(6 \times 4)^3$
- b) $[(7 \times (-2))^5]$

15. Écris chacune des expressions sous la forme d'une division de deux puissances.

- a) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$
- b) $\left(\frac{2}{7}\right)^4$

16. Évalue ces expressions.

- a) -4^2
- b) $(-10)^0$
- c) $3^2 \times 3^3$

3.3 La priorité des opérations, pages 108 à 113

17. Écris la séquence de touches que tu dois suivre sur ta calculatrice pour évaluer ces expressions.

- a) $(-2)^2 + (-2)^3$
- b) $(2^3)^2 - 4 \times 6^0$
- c) $(-3)^4 - (-3)^3 + (2 \times 4)^2$

18. Évalue ces expressions.

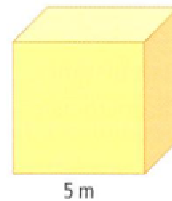
- a) $7^2 + (-2)^3 \div (-2)^2$
- b) $(2 - 5)^3 + 6^2$
- c) $\frac{(2)^6(2)^2 - 13 \times 2^0}{(-1 + 2^2)^5}$
- d) $(-1)^{10} + (-22)^0 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

19. Il y a une erreur dans la solution d'Angie. Explique-la, puis détermine la bonne réponse.

$$\begin{aligned} & (-3)^6 + 7 \times 2^3 \\ &= 81 + 7 \times 8 \\ &= 88 \times 8 \\ &= 704 \end{aligned}$$

3.4 La résolution de problèmes à l'aide des puissances, pages 114 à 119

20. Quelle est l'aire totale d'un cube dont chaque côté mesure 5 m ?



21. Une population de 10 bactéries double chaque heure. Cette croissance est représentée par $N = 10(2)^t$, où N est le nombre de bactéries et t , le temps en heures. Combien de bactéries y aura-t-il dans :

- a) 3 heures ?
- b) 6 heures ?

22. Dans la formule $d = 4,9t^2$, qui exprime approximativement la distance que franchit un objet en chute libre, d est la distance totale en mètres et t est le temps en secondes. Un caillou se détache d'une falaise. Quelle distance franchit-il :

- a) en 1 s ?
- b) en 2 s ?
- c) en 6 s ?



Test pratique du chapitre 3

Aux numéros 1 à 6, choisis la meilleure réponse.

- Dans la puissance 4^3 , que représente la valeur 3?

A la base	B la puissance
C l'exposant	D le coefficient
- Dans l'expression $-(-3)^5$, quel est le coefficient?

A -3	B -1
C 1	D 3
- Laquelle de ces expressions représente $(3^2)^4$?

A $(3 \times 3)(3 \times 3 \times 3 \times 3)$
B $(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
C $(3 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 3)$
D $(3 \times 3 \times 3 \times 3)(3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $(3 \times 3 \times 3 \times 3)(3 \times 3 \times 3 \times 3)$
- Laquelle de ces expressions équivaut à $(5 \times 4)^2$?

A 10×8	B 5×4^2
C $5^2 \times 4$	D $5^2 \times 4^2$
- Comment représentes-tu $\frac{(-7)^3(-7)^5}{(-7)^2}$ sous la forme d'une puissance unique?

A $(-7)^6$	B $(-7)^{10}$
C $(-7)^{13}$	D $(-7)^{17}$
- Évalue l'expression $(7 - 2)^3 + 48 \div (-2)^4$.

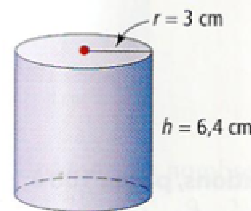
A 338	B 128
C 10,812 5	D -10,812 5

Complète les énoncés 7 et 8.

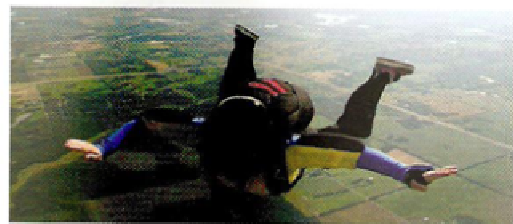
- L'expression $10^5 \times 5^5$ écrite avec un seul exposant est ■.
- L'expression $\frac{5^6}{8^6}$ écrite avec un seul exposant est ■.

Réponses brèves

- Écris l'expression $\frac{4^4 \times 4}{4^2}$ sous la forme d'une multiplication répétée, puis évalue-la.
- La formule du volume d'un cylindre est $V = \pi r^2 h$. Trouve le volume V d'un cylindre dont le rayon mesure 3 cm et la hauteur, 6,4 cm. Exprime ta réponse au dixième de centimètre cube près.



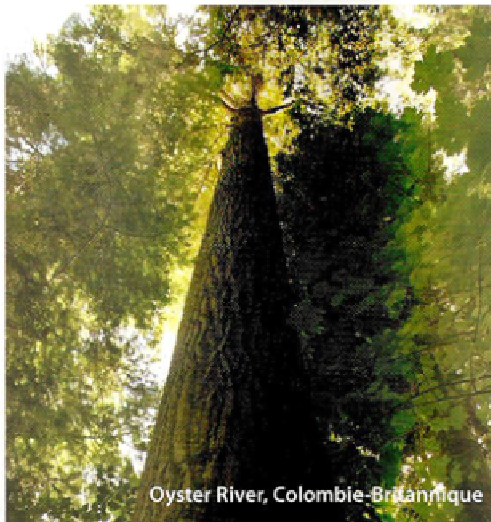
- Avant d'ouvrir son parachute, un parachutiste tombe en chute libre. Quelle distance franchit-il en 7 s de chute libre? Sers-toi de la formule $d = 4,9t^2$, où d est la distance en mètres et t , le temps en secondes.



- Écris la séquence des touches à suivre sur ta calculatrice pour évaluer ces expressions, puis évalue-les.

a) $(1 - 3)^4 \div 4$
b) $(-2)^0 + 4 \times 17^0$
c) $16 - 9(2^3) + (-4)^2$
- Les facteurs premiers de 243 sont $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Écris autant de produits de deux puissances de 3 que possible qui égalent 243.

14. La formule $V = 0,05hc^2$ sert à estimer le volume, V , de bois d'un arbre en mètres cubes. La hauteur, h , et la circonférence du tronc, c , sont en mètres. Quel est le volume de bois d'un arbre de 32 m de hauteur dont le tronc a une circonférence de 2,3 m ?



Réponses à développement

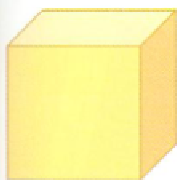
15. Nabil a fait une erreur en simplifiant cette expression.

$$\begin{aligned} & (12 + 4)^4 + (5 + 3)^2 \\ &= (3)^4 + 5^2 + 3^2 \\ &= 81 + 25 + 9 \\ &= 106 + 9 \\ &= 115 \end{aligned}$$

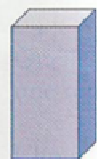
- a) Explique son erreur.
b) Détermine la bonne réponse.
16. La population d'un certain type de bactérie triple toutes les 24 h. En ce moment, les bactéries sont au nombre de 300.
- a) Fais un tableau qui indique le nombre de bactéries à la fin des sept prochaines journées. Exprime ces nombres sous la forme du produit d'un coefficient et d'une puissance.
b) Détermine une formule pour calculer le nombre de bactéries, B , après j journées.
c) À l'aide de cette formule, calcule le nombre de bactéries après 9 jours.
d) Combien de bactéries y avait-il hier à la même heure? Explique ton raisonnement.

Pour terminer

Fabrique un mobile avec au moins trois types d'objets à trois dimensions, par exemple un cube, un prisme à base carrée et un cylindre. Tu peux également en utiliser d'autres.



cube



prisme à base carrée



cylindre

- Pour les dimensions de tes objets, choisis des nombres naturels entre 10 et 20 cm.
- À l'aide d'une règle et de papier de bricolage ou d'un autre papier robuste, dessine le développement de chaque objet.
- Fabrique les objets.
- Indique l'aire totale et le volume de chaque objet avec des expressions de forme exponentielle.
- Évalue chacune de ces expressions. Montre ton travail.
- Fabrique ton mobile, mets-y de la couleur et de la créativité!